Lösungen Klausur Mathematik 2, Teil Wirtschaftsmathematik

Aufgaben **(Punkte)**

1. Sind die folgenden komplexen Zahlen jeweils gleich (Begründung durch Umrechnen)

   a) $5e^{i\frac{\pi}{3}} = 5 + \frac{5\sqrt{3}}{2} i$? **(3)**

   $5e^{i\frac{\pi}{3}} = 5\cos\frac{\pi}{3} + 5i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} i \neq 5 + \frac{5\sqrt{3}}{2} i$

   Die beiden komplexen Zahlen sind verschieden.

   b) $2e^{i30°} = 2e^{i\frac{25}{6}\pi}$? **(3)**

   $2e^{i30°} = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+2\cdot 2\pi\right)} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{24}{6}\pi\right)} = 2e^{i\frac{25}{6}\pi}$

   Die beiden komplexen Zahlen sind gleich.

   c) $\left(2e^{i20°}\right)^3 = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$? **(4)**

   $\left(2e^{i20°}\right)^3 = 2^3 e^{i\cdot 3\cdot 20°} = 8e^{i\cdot 60°} = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$

   Die beiden komplexen Zahlen sind gleich.

2. Eine Baugesellschaft hat ein Grundstück von 12 000 m^2 erworben. Darauf sollen freistehende Häuser, Doppelhaushälften und Mehrfamilienhäuser gebaut werden. Folgende Informationen sind gegeben:

   - Ein freistehendes Haus benötigt 800 m^2 Grundstücksfläche und 3000 Handwerkerstunden. Beim Verkauf erzielt die Baugesellschaft einen Gewinn von 50000 Euro.
   - Eine Doppelhaushälfte benötigt 400 m^2 Grundstücksfläche und 2700 Handwerkerstunden. Beim Verkauf erzielt die Baugesellschaft einen Gewinn von 30000 Euro.
   - Ein Mehrfamilienhaus benötigt 1000 m^2 Grundstücksfläche und 6000 Handwerkerstunden. Es besteht aus 5 Familienwohnungen. Beim Verkauf erzielt die Baugesellschaft **pro Wohnung** einen Gewinn von 20000 Euro.
   - Es gibt 20 interessierte Familien für ein freistehendes Haus, 15 interessierte Familien für eine Doppelhaushälfte und 10 interessierte Familien für eine Wohnung im Mehrfamilienhaus.
   - Maximal stehen der Baugesellschaft 55000 Arbeitsstunden zur Verfügung.
   - Die Gemeinde schreibt eine verdichtete Bauweise vor: Der durchschnittliche Verbrauch an Grundstücksfläche pro Familie darf 500 m^2 nicht übersteigen.

   Die Baugesellschaft will das Grundstück so auf die verschiedenen Arten von Häusern aufteilen, dass alle Randbedingung eingehalten werden und der Gewinn maximiert wird.

a) Welche Parameter kann die Baugesellschaft verändern? **(3)**

Bezeichnung des Parameters	**Bedeutung des Parameters**
x	Anzahl der freistehenden Häuser
y	Anzahl der Doppelhaushälften
z	Anzahl der Mehrfamilienhäuser

b) Geben Sie die Gewinnfunktion an **(3)**

$G(x, y, z) = 50000\,x + 30000\,y + 5 * 20000\,z = 50000\,x + 30000\,y + 100000\,z$

c) Stellen Sie ein lineares Ungleichungssystem für obige Optimierungsaufgabe auf. **(11)**

$800\,x + 400\,y + 1000\,z \le 12000$ •• Grundstücksfläche

$3000\,x + 2700\,y + 6000\,z \le 55000$ •• Handwerkerstunden

$12000 / (x + y + 5\,z) \le 500 \Leftrightarrow$ ••

$500\,x + 500\,y + 2500\,z \ge 12000$ • durchschn. Fläche

$x \le 20$ •• Interessenten freistehendes Haus

$y \le 15$ Interessenten Doppelhaushälfte

$5\,z \le 10$ Interessenten Mehrfamilienhaus

$x \ge 0$ • keine negativen Häuser möglich

$y \ge 0$

$z \ge 0$

Alls weitere Randbedingung muss noch genannt werden, dass x, y, und z ganze Zahlen sein müssen und y sinnvollerweise eine gerade Zahl.

3. Bei einem Quiz wird folgendermaßen gespielt:

- In der ersten Runde bekommt der Kandidat eine Frage aus seinem Fachgebiet. Wenn er Sie nicht oder falsch beantwortet ist er ausgeschieden und bekommt 0 Euro Gewinn, sonst kommt er in die zweite Runde.
- In der zweiten Runde bekommt der Kandidat wieder eine Frage aus seinem Fachgebiet. Wenn er Sie nicht oder falsch beantwortet, ist das Quiz beendet und er bekommt 1000 Euro Gewinn, sonst kommt er in die dritte Runde.
- In der dritten Runde bekommt der Kandidat eine letzte Frage aus seinem Fachgebiet. Wenn er Sie nicht oder falsch beantwortet bekommt er 2000 Euro Gewinn, wenn er auch die letzte Frage richtig beantwortet bekommt er 4000 Euro.

Ein Kandidat, Herr Müller, kann r = 70% der Fragen seines Fachgebietes richtig beantworten. Dies hat er beim Lernen auf das Fachgebiet herausgefunden

a) Berechnen Sie zunächst **allgemein** in Abhängigkeit von **r** und dann speziell für **r = 70%** die Wahrscheinlichkeiten für einen Gewinn von 0 Euro, 1000 Euro, 2000 Euro und 4000 Euro. **(8)**

	allgemein für r	speziell für r = 70%
p(0 Euro) =	$1 - r$	$1 - 0{,}7 = 0{,}3$
p(1000 Euro) =	$r\,(1 - r)$	$0{,}7\,(1 - 0{,}7) = 0{,}21$
p(2000 Euro) =	$r^2\,(1 - r)$	$0{,}7^2\,(1 - 0{,}7) = 0{,}147$
p(4000 Euro) =	r^3	$0{,}7^3 = 0{,}343$

b) Der erzielte Gewinn G ist eine Zufallsvariable, die von der zufälligen Wahl der Fragen abhängt. Die Dichtefunktion von G für r = 70% haben Sie in Aufgabenteil a) berechnet. Berechnen Sie daraus den Erwartungswert des Gewinns E(G). **(6)**

$$E(G) = \sum_{i=1}^{4} G_i\, p(G_i) = 0 \cdot 0{,}3 + 1000 \cdot 0{,}21 + 2000 \cdot 0{,}147 + 4000 \cdot 0{,}343 = 1876$$

c) In der vorigen Aufgabe wurde der Erwartungswert berechnet. Das Ergebnis ist E(G) = 1876. Für die Varianz gilt Var(G) = 2 766 240.
Ein Kandidat darf an diesem Quiz insgesamt n = 10 mal teilnehmen. Der durchschnittliche Gewinn ist wieder eine Zufallsvariable $\bar{G} = \frac{1}{n}\left(G_1 + G_2 + \cdots + G_n\right)$, wobei die G_i unabhängige Kopien von G sind.
$\bar{G}$ ist nach dem zentralen Grenzwertsatz annähernd normalverteilt und es gilt

$E(\bar{G}) = E(G) = 1876$ und $Var(\bar{G}) = \frac{1}{n} Var(G) = \frac{2766240}{10} = 276624$

Der Kandidat Müller hat tatsächlich bei seinen 10 Teilnahmen einen Gewinn von 22000 Euro erzielt, d. h. einen durchschnittlichen Gewinn von 2200 Euro.
Führen Sie einen einseitigen Test für die Hypothese $E(\bar{G}) \le 1876$ durch bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0{,}025$. Sie können dazu die Tabelle der Standardnormalverteilung unten verwenden. **(9)**

Umrechnen auf Standardnormalverteilung:

$$S(\bar{G}) = \frac{1}{\sqrt{Var(\bar{G})}}\left(\bar{G} - E(\bar{G})\right) = \frac{1}{\sqrt{276624}}\left(\bar{G} - 1876\right) = 0{,}0019\left(\bar{G} - 1876\right)$$

Umrechnen des tatsächlich gemessenen Wertes von $\bar{G}$ auf S:
S(2200) = 0,0019 * (2200 – 1876) = 0,6156
Bestimmung der Grenze g des Ablehnungsbereichs:

$$p(\bar{G} > g) = \alpha = 0{,}025 \Leftrightarrow 1 - \Phi(g) = \alpha \Leftrightarrow \Phi(g) = 1 - \alpha = 0{,}975 \Leftrightarrow$$

$$g = \Phi^{-1}(0{,}975) = 1{,}95996$$

Der Ablehnungsbereich liegt oberhalb von g = 1,95996.
Vergleich des gemessenen, umgerechneten Wertes mit der Grenze:
S(2200) = 0,6156 < 1,95996 = g. Der gemessene Wert liegt also im Annahmebereich, die Hypothese wird akzeptiert.

4. In der Mathematik-Klausur der FH Weinburg waren drei Studiengänge beteiligt: Studiengang A, B und C. 40% der Teilnehmer kamen vom Studiengang A, 40% vom Studiengang B und 20% vom Studiengang C. Beim Studiengang A erzielten 10% der Teilnehmer die Note "sehr gut", beim Studiengang B 12% und beim Studiengang C 15%.

a) Aus dem Stapel aller Klausuren wird nun zufällig eine herausgezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Klausur mit "sehr gut" bewertet. (Geben Sie die Formel und die Rechenschritte an, nicht nur das Ergebnis) **(5)**

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:
p("gezogene Klausur sehr gut") =
p(sehr gut|A) p(A) + p(sehr gut|B) p(B) + p(sehr gut|C) p(C) =
0,1 * 0,4 + 0,12 * 0,4 + 0,15 * 0,2 = 0,118

b) Eine zufällig herausgezogene Klausur war mit "sehr gut" bewertet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt Sie von einem Studenten/einer Studentin des Studiengangs C?. (Geben Sie die Formel und die Rechenschritte an, nicht nur das Ergebnis) **(5)**

Satz von Bayes:

$$p(C \mid \text{sehr gut}) =$$

$$\frac{p(\text{sehr gut} \mid C) \cdot p(C)}{p(\text{sehr gut} \mid A) \cdot p(A) + p(\text{sehr gut} \mid B) \cdot p(B) + p(\text{sehr gut} \mid C) \cdot p(C)} =$$

$$\frac{0{,}15 \cdot 0{,}2}{0{,}118} = 0{,}254$$

x	$\Phi^{-1}(x, \mu = 0, \sigma = 1)$	x	$\Phi^{-1}(x, \mu = 0, \sigma = 1)$
0,025	-1,95996	0,525	0,0627068
0,05	-1,64485	0,55	0,125661
0,075	-1,43953	0,575	0,189118
0,1	-1,28155	0,6	0,253347
0,125	-1,15035	0,625	0,318639
0,15	-1,03643	0,65	0,38532
0,175	-0,934589	0,675	0,453762
0,2	-0,841621	0,7	0,524401
0,225	-0,755415	0,725	0,59776
0,25	-0,67449	0,75	0,67449
0,275	-0,59776	0,775	0,755415
0,3	-0,524401	0,8	0,841621
0,325	-0,453762	0,825	0,934589
0,35	-0,38532	0,85	1,03643
0,375	-0,318639	0,875	1,15035
0,4	-0,253347	0,9	1,28155
0,425	-0,189118	0,925	1,43953
0,45	-0,125661	0,95	1,64485
0,475	-0,0627068	0,975	1,95996
0,5	0		

Tabelle der Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion für die Standardnormalverteilung.