Rainer Roos
FH Karlsruhe Fachbereich WI am 10.7.2002

Klausur in Statistik, Teil Wahrscheinlichkeitsrechnung

Zum Erreichen der Note 4.0 sind 20 Punkte hinreichend, zum Erreichen von 1.0 42 Punkte (in der Teilklausur).

Aufgabe 1: Mit einem idealen Würfel wird fünfmal gewürfelt.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
   a. A = {Alle Ergebnisse verschieden} (2 P)
   b. B = { Alle Ergebnisse gerade} (1 P)
   c. C = { genau drei gerade Zahlen} (2 P)
   d. D = { mehr gerade als ungerade Zahlen} (2 P)
   e. E = { die Summe der Augenzahlen ist 8} (3 P)

b) X sei die Anzahl der gewürfelten Sechsen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X. Berechnen Sie E(X). (8 P)

Hinweis: Ergebnisse als Brüche oder auf zwei Dezimalstellen gerundet.

Aufgabe 2: Vor einem Untersuchungsausschuss lügen 90% aller Befragten. Ein erfahrener Journalist erkennt in 80% aller Fälle, dass ein lügender Befragter lügt, in 10% aller Fälle weiß er es nicht; er erkennt in 90% aller Fälle, dass ein die Wahrheit sagender Befragter die Wahrheit sagt, in 5% aller Fälle weiß er es nicht. Ein Befragter wird zufällig ausgewählt. Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

a) Der Journalist sagt,
   1. dieser sage die Wahrheit,
   2. er wisse nicht, ob dieser die Wahrheit sage
   3. dieser sage nicht die Wahrheit (lüge). (8 P)

b) Dass der Ausgewählte die Wahrheit sagt, wenn der Journalist sagt,
   1. dieser sage die Wahrheit
   2. er wisse nicht, ob dieser die Wahrheit sage. (10 P)

Aufgabe 3:

a) X sei diskrete Zufallsvariable mit $W_X = \{x_1, x_2, \ldots , x_n\}$. f(x) sei die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X. Warum ist $\sum_{i=1}^{n}(x_i - E(X))f(x_i)$ kein sinnvolles Streuungsmaß? (4 P)

b) In der deskriptiven Statistik und in der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird die Varianz als Streuungsmaß definiert. Die errechnete Zahl ist schwierig zu interpretieren. Woran liegt das? (Ein Grund genügt). (4 P)

c) Für eine zufällige Variable X hat man E(X) berechnet. Was bedeutet diese Zahl? (3 P)

d) Warum definiert man Verteilungsfunktionen? (Ein Grund genügt) (3 P)

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

Ergebnisse und Klausureinsicht:

Lösungen:

Aufgabe 1:

a) $|M| = 6^5$.

b) $|A| = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$; daher (nach Kürzen) $P(A) = \frac{5}{54} = 0{,}0926$.

c) $|B| = 3^5$. Daher (nach Kürzen): $P(B) = \frac{1}{32} = 0{,}03125$.

d) $|C| = \binom{5}{3} \cdot 3^3 \cdot 3^2 = 10 \cdot 3^5$. Daher nach Kürzen: $P(C) = \frac{10}{32} = 0{,}3125$

e) P(D) = 0.5

f) E kann auf folgende Arten realisiert werden: Genau eine 4, sonst Einsen; genau eine Drei, genau eine Zwei, sonst Einsen; genau drei Zweien, zwei Einsen. Man erhält damit:

$|E| = 5 + 5 \cdot 4 + \binom{5}{3} = 35$. Es folgt $P(E) = \frac{35}{6^5} = \frac{35}{7776} = 0{,}0045$..

g) f(x) sei die Wahrscheinlichkeitsfunktion. Dann gilt: $f(x) = \binom{5}{i} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^i \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{5-i}$.

Ergebnisse in der folgenden Tabelle:

i	0	1	2	3	4	5
f(i)	$\frac{3125}{7776}$	$\frac{3125}{7776}$	$\frac{1250}{7776}$	$\frac{250}{7776}$	$\frac{25}{7776}$	$\frac{1}{7776}$
f(i)	0,401877572	0,401877572	0,160751029	0,032150206	0,003215021	0,000128601

Für E(X) gilt: $E(X) = \sum_{i=0}^{5} f(i) \cdot i = \frac{5}{6}$

Aufgabe 2: Folgende Bezeichnungen:

A = {Befragter lügt}
B = {Journalist sagt, dass Befragter lügt}
C = {Journalist sagt, er weiß nicht, ob Befragter lügt}
D = {Journalist sagt, dass Befragter die Wahrheit sagt}

Dann gelten: $P(A) = 0{,}9$, $P(\bar{A}) = 0{,}1$;

$P(B|A) = 0{,}8$; $P(C|A) = 0{,}1$; $P(D|A) = 0{,}1$;
$P(B|\bar{A}) = 0{,}05$; $P(C|\bar{A}) = 0{,}05$; $P(D|\bar{A}) = 0{,}9$;

a) Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:
$P(D) = P(D|A) \cdot P(A) + P(D|\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 0{,}1 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}18$; analog:
$P(C) = P(C|A) \cdot P(A) + P(C|\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 0{,}1 \cdot 0{,}9 + 0{,}05 \cdot 0{,}1 = 0{,}095$
$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 + 0{,}05 \cdot 0{,}1 = 0{,}725$;
Die Summenprobe ergibt 1.

b) Satz von Bayes:

$$P(\bar{A}|D) = \frac{P(D|\bar{A})\cdot P(\bar{A})}{P(D)} = \frac{0{,}9\cdot 0{,}1}{0{,}18} = \frac{1}{2}$$

$$P(\bar{A}|C) = \frac{P(C|\bar{A})\cdot P(\bar{A})}{P(C)} = \frac{0{,}05\cdot 0{,}1}{0{,}095} = \frac{1}{19} = 0{,}0526..$$

Bemerkung: Gute Lösungen mit Baumstruktur möglich!

Aufgabe 3:

a) $\sum_{i=1}^{n}(x_i - E(X))f(x_i) = 0$, unabhängig von den konkreten Werten. Da kann nichts gemessen werden!

b) Var(X) = $\sum_{i=1}^{n}(x_i - E(X))^2 f(x_i)$; das Quadrieren verzerrt, dies macht die Interpretation schwierig.

c) E(X) ist das mittlere Ergebnis auf lange Sicht.

d) Um eine einheitliche Beschreibung im diskreten und stetigen Fall zu erreichen.