Analysis - II - Zusammenfassung - Vektor Analysis

Tangentialvektor:

$$t \longrightarrow \vec{K}(t)$$

$$\vec{t} = \vec{K}'(t) \quad \text{Jede Komponente nach } t \text{ abgeleitet}$$

normierter Tangentialvektor:

$$\hat{\vec{t}} = \frac{\vec{t}}{\|\vec{t}\|}$$

Tangentialvektor in s-Parameterdarstellung

$$\cancel{\vec{t}_{(s)} = \vec{t}_{(\alpha)} \frac{d\alpha}{ds}} \quad \text{~~wobei gilt~~} \quad \cancel{\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\|\vec{t}_{(\alpha)}\|}}$$

$$\cancel{\hookrightarrow \vec{t}_{(s)} = \vec{t}_{(\alpha)} \cdot \frac{1}{}} \qquad \cancel{\hookrightarrow ds = \|\vec{t}_{(\alpha)}\| \cdot d\alpha}$$

$$\frac{dK}{ds} = \vec{t}_{(s)} = \frac{d\vec{K}}{dt}\frac{dt}{ds} = \vec{t}_{(t)} \frac{dt}{ds}$$

$$\cancel{ds = \|\vec{t}_{(\alpha)}\| d\alpha}$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\|\vec{t}_{(\alpha)}\|}$$

$$ds = \|\vec{t}_{(\alpha)}\| d\alpha$$

Krümmung:

$$\mathcal{K} = \frac{d\alpha}{ds} \qquad \mathcal{K} > 0 \text{ linkskrümmung}$$

$$\mathcal{K} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \qquad \mathcal{K} < 0 \text{ rechtskrümmung}$$

Normalenvektor: im $\mathbb{R}^2$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix}$ $\quad \hat{\vec{n}} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$

Fresnet Gleichungen:

Kurven in der Ebene: $\Rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\vec{T}' = K \cdot \hat{\vec{n}} \qquad \hat{\vec{n}} = \vec{N}$$

$$\vec{N}' = -K \cdot \vec{T}$$

Kurven im Raum $\Rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$\vec{T}' = K\vec{N} \quad \vec{B}' = -\tau \cdot \vec{N} \quad (\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N})$$

$$\vec{N}' = -K\vec{T} + \tau \cdot \vec{B}$$

Darboux'scher Drehvektor

$$\vec{D} := \tau\vec{T}^{*} + K\vec{B}$$

$$\vec{T}' = \vec{D} \times \vec{T}$$

$$\vec{N}' = \vec{D} \times \vec{N}$$

$$\vec{B}' = \vec{D} \times \vec{B}$$

Gradient:

$$\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right)$$

Grad kann nur von einer skalaren Funktion gebildet werden, auf keinen Fall von einem Vektor

Nabla-Operator: $\vec{\nabla}$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \dots\right) = (\partial_x, \partial_y, \partial_z, \dots)$$

$$\operatorname{grad} F = \vec{\nabla} F$$

Divergenz:

$$\operatorname{div} \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$$

wenn $\vec{V} = \operatorname{grad} U \Leftrightarrow \operatorname{rot} \vec{V} = 0$

↳ wenn Rotation von einem Vektor $\vec{V}$ null ist so lässt er sich als skalare Funktion beschreiben.

↳ Wegunabhängigkeit

Analysis II - Zusammenfassung - Vektor Analysis

Kurvenintegral: (Wegintegrale)

allgemein:

$$W = \int \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{s}$$

spezielle Parameterdarstellung:

$$W = \int \vec{F}(\vec{r}(t))\, \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt$$

Oberflächenintegrale:

Oberfläche von Flächenstücken

$$\int do = \iint \sqrt{g}\, du_1\, du_2$$

wobei g ist

$$g = \det g_{ik} = \| \partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi \|$$

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} \partial_1 \vec{\Phi} \cdot \partial_1 \vec{\Phi} & \partial_1 \vec{\Phi} \cdot \partial_2 \vec{\Phi} \\ \partial_2 \vec{\Phi} \cdot \partial_1 \vec{\Phi} & \partial_2 \vec{\Phi}\, \partial_2 \vec{\Phi} \end{pmatrix}$$

$$g = g_{11} g_{21} - g_{21} \cdot g_{12}$$

vektorielles Oberflächenelement:

$$d\vec{o} = \vec{n}\, do$$

$$\vec{n} = \frac{\partial_1 \Phi \times \partial_2 \vec{\Phi}}{\| \partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi \|}$$

Oberflächenintegral:

$$\int \vec{v}\, do = \iint \vec{v}\,(\nu(u_1, u_2))\, \vec{n} \sqrt{g}\, du_1\, du_2$$

Stokes'scher Integralsatz:

$$\oint \vec{v}\, d\vec{s} = \int \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{o}$$

Gaußscher Integralsatz:

$$\int_{\text{geschl. Fläche}} \vec{v} \cdot d\vec{o} = \int_{\text{Innerer Raum}} \operatorname{div} \vec{v}\, dv$$

Gesamtlösung = homogener Teil + Inhomogener

n-te Ordnung homogen

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0 y(x) = 0$$

exponentialansatz:

$$y(x) = a_0 \cdot e^{\lambda x} \qquad c, \lambda = const$$

$$y'(x) = a_1 \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x}$$

$$y''(x) = a_2 \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$$

$$y^{(n)}(x) = a_n \cdot \lambda^n e^{\lambda x}$$

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

Wenn alle Nullstellen verschieden sind, dann:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_n e^{\lambda_n x}$$

Zur Bestimmung sind n Anfangsbestimmungen nötig

Wenn Nullstellen mehrfach vorhanden sind, dann

r = wie oft die Nullstelle vorhanden ist

$$\sum_{\mu=0}^{r-1} c_{j\mu} x^{\mu} \cdot e^{\lambda_j x}$$

n-te Ordnung Inhomogen

Lineare inhomogene DGL's – 1. Ordnung

$$\underbrace{y' = g(x)\,y}_{\text{homog. Teil}} + \underbrace{h(x)}_{\text{Inhomogen}}$$

1) Homogener Teil:

$$y' = g(x)\,y$$

Trennung der Variablen:

$$y' = \frac{dy}{dx} = g(x)\,y \quad | \cdot dx \quad | : y$$

$$\frac{1}{y}\,dy = g(x)\,dx$$

Integral bilden

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int g(x)\,dx$$

$$\ln y + C_1 = G(x) + C_2$$

$$\ln y = G(x) + C_2 - C_1 \qquad C_2 - C_1 = C$$

$$\ln y = G(x) + C$$

$$e^{\ln y} = e^{G(x)+C}$$

$$y = e^{G(x)} \cdot e^{C} \qquad e^{C} = C = \text{const.}$$

$$y = C\,e^{G(x)}$$

2.) Inhomogener Teil:

Annahme: $h(x) = C'(x) \cdot e^{G(x)} \quad | : e^{G(x)} \qquad e^{-G(x)} = \frac{1}{e^{G(x)}}$

$$e^{-G(x)} \cdot h(x) = c'(x) = \frac{dc}{dx} \quad | \cdot dx$$

$$dc = e^{-G(x)} \cdot h(x) \cdot dx$$

Integral bilden

$$\int dc = \int e^{-G(x)} \cdot h(x) \cdot dx$$

$$c(x) = \int e^{-G(x)} \cdot h(x) \cdot dx$$

eingesetzt in

$$y(x) = c(x) \cdot e^{G(x)} = \int e^{-G(x)} \cdot h(x)\,dx \cdot e^{G(x)}$$

Anmerkung

Durch die Bezeichnung „*Variation der Konstanten*" soll zum Ausdruck gebracht werden, daß die Integrationskonstante K „variiert", d.h. durch eine *Funktion* $K(x)$ ersetzt wird.

■ **Beispiele**

Hinweis: Die beim Lösen einer Differentialgleichung anfallenden Integrale werden der *Integraltafel der Formelsammlung* entnommen (Angabe der jeweiligen *Integralnummer*). Diese Regelung gilt im *gesamten* Kapitel.

(1) $y' + \frac{y}{x} = \cos x$

Wir lösen zunächst die zugehörige *homogene* Differentialgleichung

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

durch *Trennung der Variablen*:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

allg. homogene Lösung

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -\ln|x| + \ln|K| = \ln\left|\frac{K}{x}\right|$$

Die *allgemeine* Lösung der *homogenen* Gleichung lautet somit:

$$y_0 = \frac{K}{x} \qquad (K \in \mathbb{R})$$

Die *inhomogene* Differentialgleichung lösen wir durch *Variation der Konstanten* $(K \rightarrow K(x))$:

$$y = \frac{K(x)}{x}, \qquad y' = \frac{K'(x) \cdot x - K(x)}{x^2} = \frac{K'(x)}{x} - \frac{K(x)}{x^2}$$

Wir setzen nun diese Funktionsterme in die *inhomogene* Differentialgleichung ein:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{K'(x)}{x} \underbrace{- \frac{K(x)}{x^2} + \frac{K(x)}{x^2}}_{0} = \cos x$$

$$\frac{K'(x)}{x} = \cos x \qquad \text{oder} \qquad K'(x) = x \cdot \cos x$$

Durch *unbestimmte Integration* folgt hieraus:

$$K(x) = \int K'(x)\,dx = \underbrace{\int x \cdot \cos x\,dx}_{\text{Integral Nr. 232}} = \cos x + x \cdot \sin x + C$$

Die *inhomogene* Differentialgleichung besitzt damit die *allgemeine* Lösung

$$y = \frac{K(x)}{x} = \frac{\cos x + x \cdot \sin x + C}{x} \qquad (C \in \mathbb{R})$$

(2) $y' - 3y = x \cdot e^{4x}$ Rechnen

Die zugehörige *homogene* Differentialgleichung

$$y' - 3y = 0$$

wird durch *Trennung der Variablen* gelöst. Ihre *allgemeine* Lösung ist

$$y_0 = K \cdot e^{3x} \qquad (K \in \mathbb{R})$$

(nachrechnen!). Die *inhomogene* Differentialgleichung lösen wir durch den Ansatz

$$y = K(x) \cdot e^{3x}$$

(*Variation der Konstanten*). Wir gehen mit den Termen

$$y = K(x) \cdot e^{3x}, \quad y' = K'(x) \cdot e^{3x} + 3K(x) \cdot e^{3x}$$

in die *inhomogene* Gleichung ein und erhalten:

$$y' - 3y = K'(x) \cdot e^{3x} \underbrace{+ 3K(x) \cdot e^{3x} - 3K(x) \cdot e^{3x}}_{0} = x \cdot e^{4x}$$

$$K'(x) \cdot e^{3x} = x \cdot e^{4x} \qquad \text{oder} \qquad K'(x) = x \cdot e^{x}$$

Durch *unbestimmte Integration* folgt:

$$K(x) = \int K'(x)\,dx = \underbrace{\int x \cdot e^{x}\,dx}_{\text{Integral Nr. 313}} = (x-1) \cdot e^{x} + C$$

Die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Differentialgleichung lautet damit:

$$y = K(x) \cdot e^{3x} = [(x-1) \cdot e^{x} + C] \cdot e^{3x} = (x-1) \cdot e^{4x} + C \cdot e^{3x}$$

■