Differentialgleichungen

1. Elementare Lösungsmethoden

A) Lösung durch Integration

$f_{(x, y_{(x)})} = f_{(x)}$
$y'_{(x)} = f_{(x)}$
$y_{(x_0)} = y_0$

$$y_{(x)} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f_{(t)}\, dt$$

B) Trennung der Variablen:

$$f_{(x,\ y_{(x)})} = \frac{g_{(x)}}{h_{(x)}} = \frac{dy}{dx}$$

$dy * h_{(y)} = dx * g_{(x)}$

$$\int_{y_0}^{y} h_{(\xi)}\, d\xi = \int_{x_0}^{x} g_{(\xi)}\, d\xi$$

C1) Zurückführung auf Trennung der Variablen durch Substitution:

Für DGL's der Form: $y' = f_{(\frac{y}{x})}$

$z = \dfrac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = x * z \quad \Rightarrow$

$y' = z + z'$

Einsetzen in DGL $y' = f_{(\frac{y}{x})} \qquad \Rightarrow$

z + xz' = $f_{(z)}$

z' = $z' = \frac{f_{(z)} - z}{x} = \frac{dz}{dx} \qquad \Rightarrow$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{f_{(z)} - z} \quad \ldots$$

C2) Zurückführung auf Trennung der Variablen durch Substitution:

Für DGL's der Form: $y' = f_{(ax+by+c)}$

Substitution: $z = ax + by + c \quad \Rightarrow \quad z' = a + by' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{z' - a}{b} = f_{(z)}$

Variablentrennung:

$$z' = b * f_{(z)} + a \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = b * f_{(z)} + a \quad \ldots$$

2. Allgemeine lineare Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$y_{(x)} = \left[\int_{x_0}^{x} h_{(t)} e^{-G(t)} \, dt + y_0 \right] e^{G(x)}$$

$$G_{(x)} = \int_{x_0}^{x} g_{(x)} \, dx$$

2.1 Bernoullische Differentialgleichungen

$$y' = p_{(x)} * y + q_{(x)} * y^n \qquad y \neq 0 \vee 1$$

Substitution: $u = y^{1-n}$

$$u' = (1-n) y^{-n} * y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'}{1-n} y^n$$

Einsetzen in die DGL:

$$y' = \frac{u'}{1-n} y^n = p_{(x)} * y + q_{(x)} * y^n \quad \Rightarrow$$

Auflösen nach u‘:

$$u' = (1-n) * p_{(x)} * y^{1-n} + (1-n) * q_{(x)}$$

Substitution rückgängig machen:

$$u' = p^*_{(x)} * u + q^*_{(x)}$$

$$u' = (1-n) \, p_{(x)} * u + (1-n) \, q_{(x)}$$

2.2 Riccatische Differentialgleichungen:

$$y' = p_{(x)} * y^2 + q_{(x)} * y + r_{(x)}$$

$$y_{i'(x)} = y_{i(x)} + \frac{1}{u_{(x)}}$$

$$u' = -\left(2 \, p_{(X)} * y_i + q_{(x)}\right) * u - p_{(x)}$$