Prof. Rose

Analysis 2

1) Ergänzungen zu Analysis 1
2) Differentialgleichungen
3) Vektoranalysis

Buch: • Fischer/Kaul : Mathematik für Physiker I
• Formelsammlung: Bronstein/Semendjajev
Mathematische Formelsammlung

Satz von Taylor; Taylor Reihen

Satz Jede reellwertige Funktion ((n + 1)-mal stetig differenzierbar auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$)

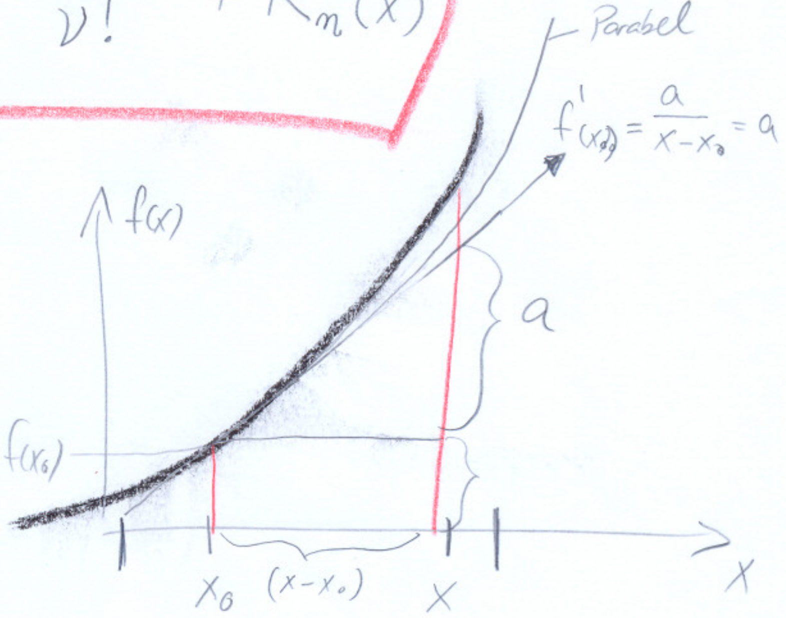
läßt sich für $x, x_0 \in I$ auf folgende Weise nach Potenzen von $(x - x_0)$ entwickeln:

Intervall:
geschlossen $[a, b]$
offen: $]a, b[$
oder: (a, b)

ν = mü

$$\boxed{f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f^{(\nu)}(x)\Big|_{x_0} \frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!} + R_n(x)}$$

$$= f^{(0)}(x)\Big|_{x_0} + f^{(1)}(x)\Big|_{x_0} \cdot (x-x_0) + f^{(2)}(x)\Big|_{x_0} \frac{(x-x_0)^2}{2}$$



Θ = Teta
ϑ = „klein"

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(x)\Big|_{\Theta} \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Θ „passender" Wert zwischen x_0 und x:

$$\Theta = x_0 + \vartheta(x - x_0) \qquad 0 < \vartheta < 1$$

Taylor - Reihen:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f^{(\nu)}(x)\Big|_{x_0} \frac{(x-x_0)^{\nu}}{\nu!}$$

Bedingung (daß eine $f(x)$ als Taylorreihe geschrieben werden kann: ⚠ Taylorreihe konvergiert $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

Konvergenzradius r Für alle $|x| \leq r$ konvergiert die Taylorreihe

Bsp. $f(\sin x)$ $x_0 = 0$

$$\sin x = \underbrace{\sin 0 \cdot 1}_{} + \underbrace{\cos 0}_{1} \cdot (x - x_0) - \underbrace{\sin 0}_{0} \cdot \frac{(x-x_0)^2}{2} - \underbrace{\cos 0}_{-1} \cdot \frac{x^3}{3!}$$

$$0 + 1 \cdot x + 0 - 1\frac{x^3}{3!} + 0 .$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \dots$$

$$\boxed{\sin x = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}}$$

HA: cos! ⚠

Taylor-Reihe von $f(x) = \cos x \quad x_0 = 0$

$$\cos x = \underbrace{\overset{\downarrow^{0}}{\cos 0}}_{1} \cdot 1 - \underbrace{\overset{\downarrow^{1}}{\sin 0} \cdot 1}_{0} - \underbrace{\overset{\downarrow^{2}}{\cos 0}}_{1} \cdot \frac{x^2}{2!} + \underbrace{\overset{\downarrow^{3}}{\sin 0} \cdot \left(\frac{(x-x_0)^3}{3!}\right)}_{0}$$

$$+ \underbrace{\overset{\downarrow^{4}}{\cos 0}}_{1} \cdot \frac{x^4}{4!}$$

$$\cos x = \overset{\frac{x^0}{0!}}{1} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} \dots$$

$$\boxed{\cos x = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}}$$

Herleitung der Taylor-Reihe

von $\cos x$; $x_0 = 0$;

$f(x) = e^x$

Taylorreihe: $(x=0)$ $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots$

$$e^x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!}$$

$$e = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1^\nu}{\nu!}$$

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$ Beweis! ⚠

?

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \qquad e = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1^\nu}{\nu!}$$

$$\sin x = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$$

!

$$e^{i\varphi} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^\nu}{\nu!}$$

$$\cos x = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}$$

$$\left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1^\nu}{\nu!}\right]^{ix} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!} + \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\right] \cdot i \quad ?$$

$$\cos x + i\sin x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \overset{s.o.}{(-1)\ldots} + \sum \overset{s.o.}{\ldots} = 1 + ix - \underbrace{\frac{x^2}{2!}}_{} - i\underbrace{\frac{x^3}{3!}}_{} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!}$$

$$= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \ldots$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(ix)^\nu}{\nu!} = e^{ix}$$

Beweis der Eulerform

Hyperbolicus - Funktionen

a) trigonometrische Funkt. in Eulerschreibweise:

Beweis! HA

$$\sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)$$

$e^{i\varphi} = \cos + i\sin\varphi$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)$$

b) hyperbolicus - Funktion:

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$
$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$\cosh x^2 - \sinh x^2 = 1$$

Taylorreihen für $\sinh x$, $\cosh x$ um $x_0 = 0$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$e^{ix} + e^{-x} = 2 \cos x$$

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-x})$$

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (e^x + e^{-x})^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (e^x - e^{-x})^2 = 1$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left[(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x})\right] = 1$$

$$4 = \cancel{e^{2x}} + 2e^x e^{-x} + \cancel{e^{-2x}} - \cancel{e^{2x}} + 2e^x e^{-x} - \cancel{e^{-2x}}$$

$$4 = 4e^x e^{-x}$$

$$e^x e^{-x} = 1$$

$$e^{x-x} = 1$$

$$e^0 = 1$$

Beweis der Hyperbolicus-funktionen mit Hilfe der Binomischen Formeln

$$\sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)$$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$e^{i\varphi} = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) + \cancel{i}\left[\frac{1}{2\cancel{i}}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)\right]$$

$$e^{i\varphi} = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} \cancel{+ e^{-i\varphi}} + e^{i\varphi} \cancel{- e^{-i\varphi}}\right)$$

$$e^{i\varphi} = \frac{1}{2}\left(2e^{i\varphi}\right)$$

$$e^{i\varphi} = e^{i\varphi}$$

Beweis der trigonometrischen Funktionen in Eulerschreibweise

Taylor-Reihe für $f(x) = \boxed{\sinh x}$ $x_0 = 0$

$$f(x) = \underbrace{\overset{\downarrow 0}{\sinh 0}}_{0} \cdot + \underbrace{\overset{\downarrow 1}{\cosh 0}}_{1} \cdot \frac{x^1}{1!} + \underbrace{\overset{\downarrow 2}{\sinh 0} \ldots}_{0} + \underbrace{\overset{\downarrow 3}{\cosh 0}}_{1} \cdot \frac{x^3}{3!} + \underbrace{\overset{\downarrow 4}{\sinh 0}}_{0} \ldots$$

$$= \frac{x^1}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots$$

$$\boxed{\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}}$$

Taylor-Reihe für $f(x) = \cosh x$; $x_0 = 0$

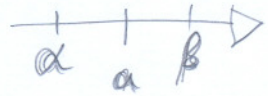
$$f(x) = \underbrace{\overset{\downarrow 0}{\cosh 0}}_{1} \cdot \frac{x^0}{0!} + \underbrace{\overset{\downarrow 1}{\sinh 0} \ldots}_{0} + \underbrace{\overset{\downarrow 2}{\cosh 0}}_{1} \cdot \frac{x^2}{2!} + \underbrace{\overset{\downarrow 3}{\sinh 0}}_{0} \ldots + \overset{\downarrow 4}{\cosh 0} \cdot \frac{x^4}{4!} \ldots$$

$$= \underbrace{\frac{x^0}{0!}}_{=1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots$$

$$\boxed{\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu \cdot 2}}{(\nu \cdot 2)!}}$$

Regel von de l'Hospital

a) Seien f, g differenzierbare Funktionen in $[\alpha, \beta]$
und es gelte $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$



$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Unterschied: a / ∞

Bsp: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ beide gehen gegen $0 \to$ de l'Hospital

$$\hookrightarrow = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to} \frac{\cos x}{1} = \underline{\underline{1}}$$

Bsp: $$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6}$$

b) $$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Bsp: $$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha - 1}} \Rightarrow \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2$$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)\cdot 2}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x \cdot 4}{\cos x} = \dfrac{4}{1}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\frac{1}{3}x^2 - x\cot x}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \frac{1}{3}x^2 \sin x - x \cdot \frac{\cos x}{\cancel{\sin x}} \cdot \cancel{\sin x}}{x^4 \cdot \sin x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 2/3\, x \cdot \cos x + \sin(x)}{4x^3 \cdot \sin x}$$

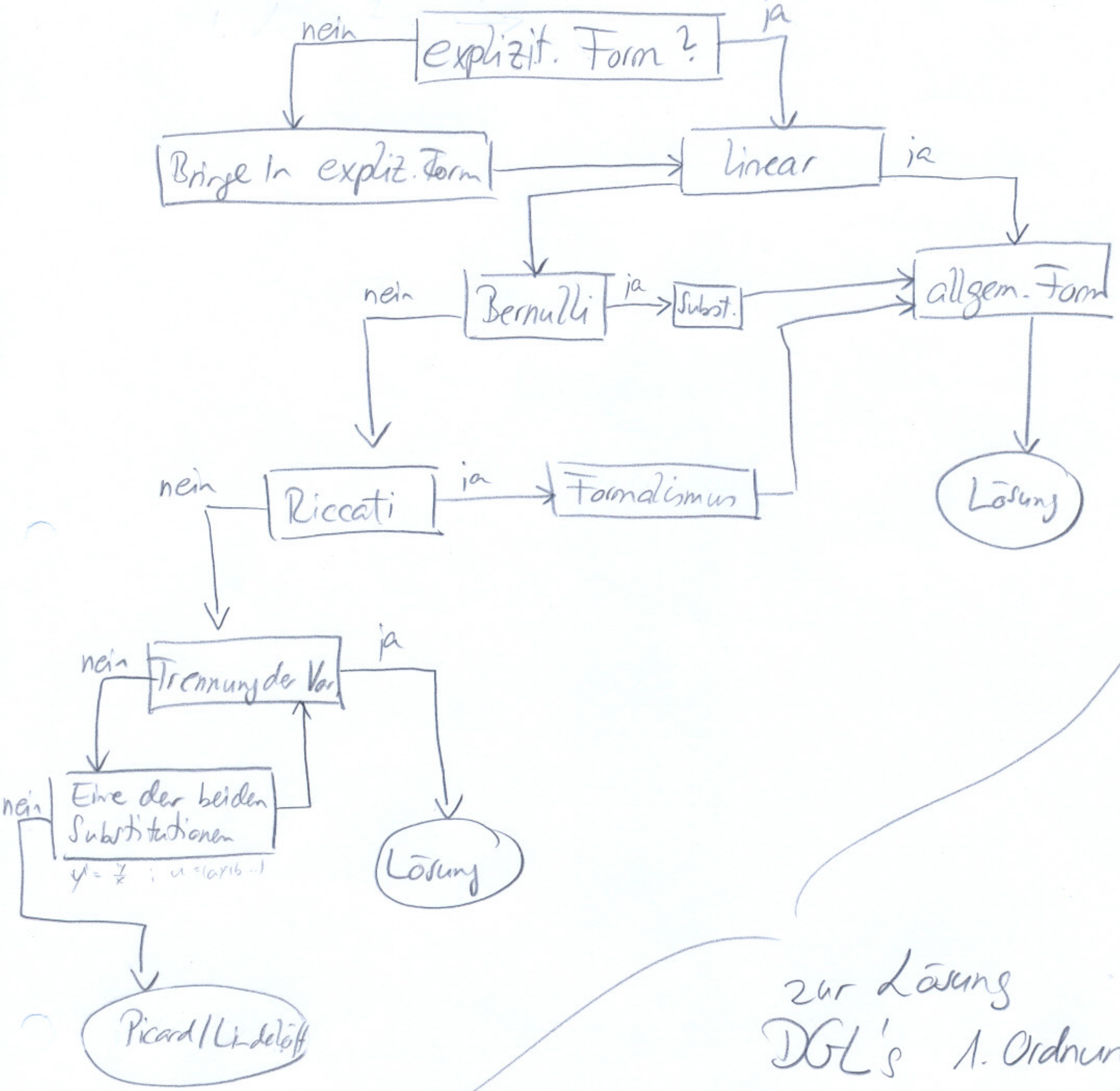
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + 2/3 \cdot \sin x + \cos x}{\cos x \cdot 12x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x - \cos x - \sin x}{-\sin x \cdot 24x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \sin x - \cos x}{-\cos x \cdot 24}$$

$$= \frac{1}{24} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \sin x - \cos x}{-\cos x} = \underline{\underline{\frac{1}{24}}}$$

$$= \frac{1}{45}$$



zur Lösung
DGL's 1. Ordnung

Differentialgleichungen (DGLs)

Radioaktiver Zerfall :

$$m(t+\Delta t) - m(t) = -\kappa\, m(t)\Delta t \Rightarrow \frac{m(t+\Delta t)-m(t)}{\Delta t} = -\kappa\, m(t)$$

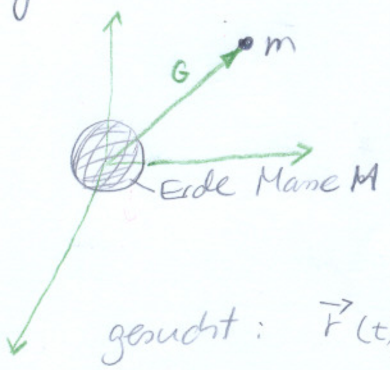
$$m'(t) = -\kappa\, m(t)$$

$$m(t) = C_1 e^{-C_2 t}$$

$$m'(t) = -C_2 \underbrace{C_1 e^{-C_2 t}}_{m(t)}$$

. . . .

Bewegungen im Gaviationsfeld



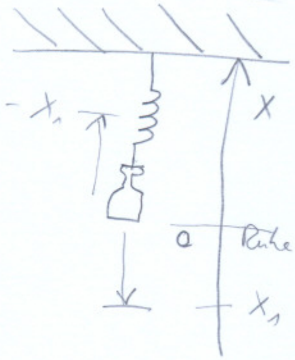
$$\vec{F}_{Gr} = m_T \ddot{\vec{r}}$$

$$\Downarrow$$

$$-G\frac{Mm}{r^3}\vec{r} = m_T\ddot{\vec{r}}$$

gesucht : $\vec{r}(t)$

Harmonicher Oszillator (Hog'sches Gesetz)



$$\boxed{-\partial x = m\ddot{x}}$$

$x(t)$ DGL 2. Grades

$$x(t) = A\cdot\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\dot{x}(t) = A\cdot[\cos(\omega t + \varphi_0)]\cdot\omega$$

$$\ddot{x}(t) = A\cdot -\sin(\omega t + \varphi_0)\cdot\omega^2$$

$$+\partial A \cancel{\sin(\omega t + \varphi_0)} = +mA\omega^2 \cancel{\sin(\,)}$$

$$\partial = m\cdot\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{\partial}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\partial}{m}}$$

$$x(t) = \underset{\sim}{A} \sin(\omega t + \underset{\sim}{\varphi_0})$$

2 Bedingungen

$x(t=0) = x_0$

$\dot{x}(t=0) == v_0$

$x_0 = A \sin \varphi_0$

$x_t = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow A = \frac{x_0}{\sin \varphi_0}$

$v_0 = A\omega \cos \varphi_0 \Rightarrow v_0 = \frac{x_0 \omega}{\sin \varphi_0} \cos \varphi_0$

$tg\, \varphi_0 = \frac{x_0 \omega}{v_0}$

$\varphi_0 = \arctan\left(\frac{x_0 \omega}{v_0}\right)$

Definition einer DGL n-ter Ordnung

$\mathbb{R}^{n+2} = (a_1, a_2, a_3 \dots, a_{n+2})\ a_\nu \in \mathbb{R}\quad \nu = 1, 2, 3, \dots, n+2;$

$F: D \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{R}$

$F(x, y(x), y'(x), y^{(2)}(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad f.a.\ x \in I \subseteq \mathbb{R}$

F ist eine DGL n-ter Ordnung

Beispiel: $m\,y''(x) = -\lambda\, y(x)$

$\ddot{y}(t) = -\frac{\lambda}{m}\, y(t)$

explizite Form

$\lambda y(x) + m\, y''(x) = 0$

implizite Form

$F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = \lambda y(x) + m y''(x) = 0$

implizide Form

$y^{(n)}(x) = f[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)]$

explizide Form (ausgewickelt) (nach höchster Ableitung)

Für eindeutige Lösungen gehören n-Anfangsbedingungen

$y^{(0)}(x_0),\ y^{(1)}(x_0),\ y^{(2)}(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$

[DGL gewöhnlich n-ter Grad + n Anfangsbedingungen
= Anfangswertproblem] !

Gewöhnliche DGL erster Ordnung + Anfangswert $y(x_0) = y_0$

Anfangs(wert)problem: DGL 1. Ordnung: $y'(x) = f(x, y(x));\ y(x_0) = y_0$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

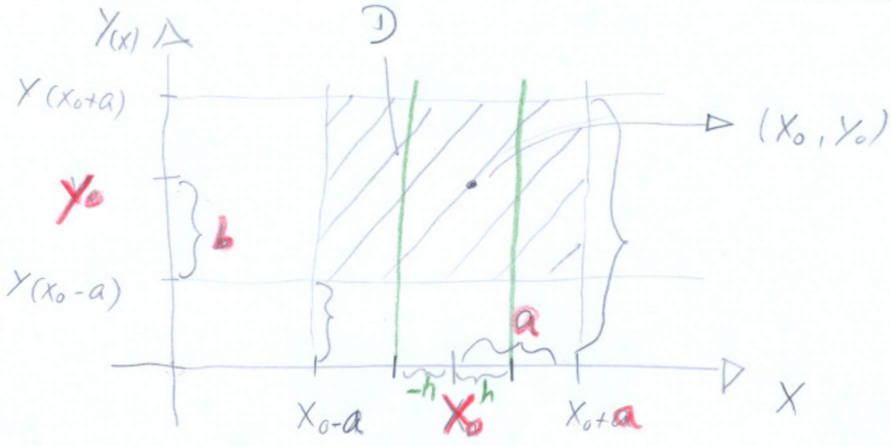
$y = \cos x \qquad y' = -\sin x = -\sqrt{1-\cos^2 x}$

$y' = -\sqrt{1-y^2}$

$$\boxed{y' = f(x,y) = -\sqrt{1-y^2}}$$

Lösung

Existenz und Eindeutigkeitssatz von Picard / Lindelöff



$f(x, y(x))$

$x_0 - a \leq x \leq x_0 + a$ $\qquad$ $y_0 - b \leq y \leq y + b$

Satz (Picard / Lindelöff):

Wenn: 1.) $f(x, y)$ stetig bezüglich x und y in D
(keine Sprungstellen)

2.) f partiell differenzierbar nach y in D

Bsp: $y'(x) = f(x, y(x))$

$y' = x^2 + y^2$

$f(x,y) = x^2 + y^2$

Umgebung: $U_h(x_0) := \{x \mid |x - x_0| < h\}$

$M = \max |f(x,y)| \quad (x,y) \in D$

$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$

[nimm das Minimum a, oder $\frac{b}{M}$]

Picard / Lindelöff

Wenn f stetig in x & y ist und f bezüglich y partiell differenzierbar ist, dann existiert in der Umgebung U_h um x_0 genau eine Lösung $y(x)$ des Anfangswertproblems $y' = f(x,y)$ mit $y(x_0) = y_0$.

Konstruktion einer Lösung für $f(x,y)$ mit $y(x_0) = y$

$f(x,y)$ ist stetig, und
partiell differenzierbar bezüglich y

formale Lösung: $\boxed{y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt}$

Beweis: $y'(x) = f(x, y(x))$

Iterationsverfahren:

0. Näherung $y_{(0)}(x) = y_0$
1. Näherung (einsetzen der Nullten Näherung in die rechte Seite der formalen Lösung)

$$y_{(1)}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\, dt$$

2. Näherung Einsetzen der vorhergehenden Näherung

$$y_{(2)}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\, dt$$

$\vdots$

n-te Näherung:
$$y_{(n)}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{(n-1)}(t))\, dt$$

Ergebnis: Folge von Näherungsfunktionen

$y_{(0)}(x),\ y_{(1)}(x),\ y_{(2)}(x) \ldots$

Zu zeigen ist: a) Wohldefiniertheit dieser Folge
b) Konvergenz (Lipschitz-Bedingung)

Beispiel für Picard/Lindelöffsches Iterationsverfahren:

Allgem: $y' = f(x,y) \quad y(x_0) = y_0$

$$\boxed{y' = y \qquad y(x_0=0) = 1} \qquad f(x,y) = y$$

P/L - Bedingung: 1) Stetigkeit bez x, y ✓
2) partielle Diff.barkeit bezgl. y ✓

Konstruktion: $y(x) = 1 + \int_0^x y(t)\,dt$

0. Näherung: $y_{(0)}(x) = 1$

1. Näherung: $y_{(1)}(x) = 1 + \int_0^x 1\,dt = 1 + t = 1 + x$

2. Näherung: $y_{(2)}(x) = 1 + \int_0^x (1+t)\,dt = 1 + (t + \frac{1}{2}t^2)\Big|_0^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

3. Näherung: $y_{(3)}(x) = 1 + \int_0^x (1 + t + \frac{1}{2}t^2)\,dt = 1 + (t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3)\Big|_0^x$

$$= 1 + \frac{x^1}{1} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

4. Näherung $y_{(4)}(x) = 1 + \int_0^x (1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3)\,dt = 1 + (t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4)\Big|_0^x$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

$$\Rightarrow \quad y_{(n)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{x^\nu}{\nu!}$$

$$y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} = \underline{\underline{e^x}}$$

Existenz <-> Konvergenzradius gekoppelt

1.) $y' = \frac{y}{x}$

2.) $y' = \frac{y}{x} + 1$

Anfangsbedingung: $y(x_0) = y_0$

$x \neq 0$

$f(x, y) = \frac{y}{x}$

$f(x, y) = \frac{y}{x} + 1$

P/L - Bedingung: 1) Stetig bez. x & y ✓ (Def: $x \neq 0$)

2) partielle diff. bzgl. y ✓

Konstruktion: $y(x) = y_0$

$F(x, y(x), y'(x)) = 0$ implizite Form

$y'(x) = f(x, y(x)) \qquad y(x_0) = y_0$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$$ Rekursionsverfahren:

$$\overset{(0)}{y}(x) = y_0$$

$$\overset{(1)}{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{y} f(t, \overset{(0)}{y}(t))\,dt$$

$$\overset{(2)}{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \overset{(1)}{y}(t))\,dt$$

---

a) $y' = \frac{y}{x}$ Anfangsbed. $y(x_0) = y_0$

$$\overset{(0)}{y} = y_0$$

$$\overset{(1)}{y} = y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{y_0}{t}\,dt = y_0 + y_0 \int_{x_0}^{x} \frac{1}{t}\,dt = y_0 + y_0 \ln \frac{x}{x_0}$$

$$\overset{(2)}{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{y_0 + y_0 \ln \frac{t}{x_0}}{t}\,dt = y_0 + y_0 \int_{x_0}^{x} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t} \ln \frac{t}{x_0}\right) dt$$

$$= y_0 + y_0 \int_{x_0}^{x} \left(\frac{1}{t}\right) dt \int_{x_0}^{x} \left(\frac{1}{t} \ln \frac{t}{x_0}\right) dt = y_0 + y_0 \int_{x_0}^{x} \left(\frac{1}{t}\right) dt + \int_{x_0}^{x} \left(\frac{1}{t}\right) \ln t - \ln x_0$$

$$= y_0 + y_0 \int_{x}^{x_0} \left(\frac{1}{t}\right) dt \int_{x}^{x_0} \frac{1}{t} \ln t\,dt - \ln x_0 \int_{x}^{x_0} \frac{1}{t}\,dt$$

Binom. Formel

?

$$\frac{1}{2}(\ln x)^2 - \frac{1}{2}(\ln x_0)^2 - \ln x_0 (\ln x - \ln x_0) = \frac{1}{2}\left[(\ln x)^2 + (\ln x_0)^2 - 2 \ln x \ln x_0\right]$$

$$\frac{1}{2}(\ln x)^2 - \frac{1}{2}(\ln x_0)^2 - \ln x_0 \ln x + (\ln x_0)^2 = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \frac{1}{2}(\ln x_0)^2 - \ln x_0 \ln x$$

$$= \frac{1}{2}(\ln x - \ln x_0)^2 = \frac{1}{2}\left(\ln \frac{x}{x_0}\right)^2$$

$$y^{(2)}_{(x)} = y_0 + y_0\left(\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right)$$

$$\boxed{y^{(n)} = y_0 \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\left(\ln\frac{x}{x_0}\right)^\nu}{\nu!}}$$

$$y(x) = y_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{u^\nu}{\nu!} = y_0 e^u = y_0 e^{\left(\ln\frac{x}{x_0}\right)} = y\frac{x}{x_0} = \left(\frac{y_0}{x_0}\right) \cdot x$$

$$y(x) = \frac{y_0}{x_0} x$$

Elementare Lösungsmethoden

Verschiedene Klassen von DGL's erster Ordnung:

$y' = f(x, y(x))$: Einschränkungen von f

A $\quad f(x, y(x)) = f(x) \qquad y'(x) = f(x)$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \qquad y(x_0) = y_0$$

B $\quad f(x, y(x)) = \dfrac{g(x)}{h(y)}$

Lösungsmethode: „Trennung der Variablen"

① $\quad y'(x) = \dfrac{g(x)}{h(y)}$

② $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g(x)}{h(y)}$

$dy \cdot h(y) = dx \cdot g(x)$

③ $\quad \displaystyle\int_{y_0}^{y} h(\xi)\,d\xi = \int_{x_0}^{x} g(\xi)\,d\xi$

1.) Setze für y' den Differentialquotienten $y' = \dfrac{dy}{dx}$

2.) Behandle die DGL so, daß jede Variablenart nur auf einer Seite der Gleichung vorkommt.* (ist das möglich? Wenn ja, folgende Methode anwendbar.) [* keine Differentiale im Nenner]

3.) Integriere auf beiden Seiten nach x und y.

Variablen

zu B

$$y' = \frac{y}{x} \qquad \text{Anfangsbedingung}: \; y(x_0) = y_0$$

① $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad ② \; \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

③ $$\int_{y_0}^{y} \frac{d\xi}{\xi} = \int_{x_0}^{x} \frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$\left(\ln \xi\right)_{y_0}^{y} = \left(\ln \lambda\right)_{x_0}^{x}$$

$$\ln\left(\frac{y}{y_0}\right) = \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

$$\frac{y}{y_0} = \frac{x}{x_0} \quad \Rightarrow \quad \underline{y = \left(\frac{y_0}{x_0}\right) \cdot x}$$

$$y' = xy \qquad y(x_0) = y_0$$

$$\frac{dy}{dx} = xy \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = x\,dx$$

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\xi}{\xi} = \int_{x_0}^{x} \alpha\, d\alpha$$

$$\cancel{\left(\ln \xi\right)_{y_0}^{y}} = \frac{x^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \ln y \overset{+C_1}{\vee} = \frac{x^2}{2} \overset{+C_2}{\vee} * \quad \cancel{\Rightarrow e^{\ln\left(\frac{y}{y_0}\right)} = e^{\frac{x^2}{2}}}$$

$$\cancel{\frac{y}{y_0} = e^{\frac{x^2}{2}} \Rightarrow y = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot y_0}$$

$$* \quad \ln y + C^* = \frac{1}{2} x^2$$

$$\frac{y}{C} = e^{\frac{1}{2}x^2} \qquad \boxed{y(x) = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}}$$

Anfangsbed.: $y(x_0) = y_0 \qquad y_0 = C e^{\frac{1}{2}x_0^2} \Rightarrow C = y_0 e^{-\frac{1}{2}x_0^2}$

$$y(x) = y_0 e^{\frac{1}{2}(x^2 - x_0^2)}$$

$y' = xy \qquad y' = \frac{y}{x} \qquad y' = g(x)\,y$

Lineare DGL $\quad y' = f(x,y)$, wenn y in höchstens erster Potenz auftritt.

DGL n-ter Ordnung $\quad y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y^{(1)}(x), y^{(2)}(x), \dots y^{(n-1)}(x))$

linear, wenn in der expliziten Form alle $(n-1)$-Ableitungen von y in höchstens erster Potenz auftreten.

Bsp:

$$y' = \frac{y^2}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}$$

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{d\alpha}{\alpha^2} = \int \frac{d\beta}{\beta}$$

$$\ln x + C_1 = -y^{-1} + C_2$$

$$\ln x + C = -\frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{\ln x + C}$$

$$y' = \frac{1}{(\ln x + C)^2 \cdot x} = \frac{y^2}{x} \checkmark$$

$y(x_0) = y_0$

$$y' = a(x)\,y \qquad \frac{dy}{dx} = a(x)\,y \Rightarrow \frac{dy}{y} = a(x)\,dx$$

$$\rightarrow \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{t} = \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt \rightarrow \ln \frac{y}{y_0} = \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt$$

$$\frac{y}{y_0} = e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt} \Rightarrow \boxed{y = y_0 \cdot e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}}$$

= Lösung der allgem. homogenen Differenzialgleichung (linear!) 1. Ordnung.

C1 DGLs der Form: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Zurückführung auf Trennung der Variablen

Substitution: $\boxed{z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \cdot z}$

$\boxed{\Rightarrow y' = z + xz'}$ einsetzen in DGL $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\Rightarrow z + xz' = f(z)$$

$$\Rightarrow z' = \frac{f(z) - z}{x} = \frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dz}{f(z) - z} \ldots$$

Bsp.

$$x^2 \cdot y' = x^2 + xy + y^2$$

explizite Form $\Rightarrow$ $y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2} = 1 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$

Substitution: $\cancel{z} + xz' = 1 + \cancel{z} + z^2$

$$x \frac{dz}{dx} = 1 + z^2 \Rightarrow \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{x} dx$$

$$\arctan + C_1 = \ln x + C_2 = \ln x - \ln C^*$$

$$\arctan z = \ln \frac{x}{C^*}$$

$$z = \tan\left(\ln \frac{x}{C^*}\right)$$

$$\boxed{y(x) = x \tan\left(\ln \frac{x}{C^*}\right)}$$

Trennung der Variablen

a) $y' = \frac{x^2}{\sin y} \quad y(x_0) = y_0$

b) $y' = \sqrt{1-y^2} \quad y(x_0) = 0$ } B

c) $y' = e^{\frac{y^2}{x^2}}$ } C_1

d) $y' = (2x+3y)^2$

e) $y' = (2x+2y-1)^2$ } C_2

---

e) $y' = (2x+2y-1)^2$

$z = 2x+2y-1$

$z' = 2 + 2 \cdot f(z)\, y'$

$y' = \frac{z'}{2} - 1 = (z)^2$

$z' = 2z^2 + 2 = \frac{dz}{dx}$

$dx = \frac{dz}{2z^2+2}$

$\int dx = \int \frac{dz}{2z^2+2} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dz}{z^2+1}$

$x + C_1 = \frac{1}{2} \arctan z + C_2$

$\arctan z = 2x + \bar{C}$

$z = \tan(2x + C)$

$z = 2x + 2y - 1$

$2y = z - 2x + 1$

$y = \frac{z+1}{2} - x \quad \Rightarrow \quad \frac{\tan(2x+C)+1}{2} - x$

a) $y' = \frac{x^2}{\sin y}$ Anfangsbed. $y(x_0) = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{\sin y} \Rightarrow \sin y \, dy = x^2 \, dx$

$\Rightarrow \int \sin y \, dy = \int x^2 dx$

$-\cos y + C_1 = \frac{x^3}{3} + C_2$

$\cos y = -\frac{x^3}{3} - C_3$

$y_{(x)} = \cos^{-1}\left(-\frac{x^3}{3} - C_3\right) \rightarrow$ Anfangsbed.

$y_0 = \arccos x \left(-\frac{1}{3} x_0^3 + C\right)$

$\cos y_0 = -\frac{1}{3} x_0^3 + C$

$C = \frac{1}{3} x_0^3 + \cos y_0$ ⊗

b) $y' = \sqrt{1-y^2}$

$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2} \Rightarrow dx = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$

$\Rightarrow \int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \int (1-y^2)^{-\frac{1}{2}} dy$

$x + C_1 = \arcsin y + C_2$

$y = \sin(x + C_1)$ 1

c) $y' = e^{\frac{y^2}{x^2}} \Rightarrow$ Lösung durch Substitution:

$u =$

⊗ eingesetzt: $y = \arccos\left(\frac{1}{3} x_0^3 - \frac{1}{3} x^3 + \cos y_0\right)$ = Lösung!

Probe: Abgeleitet: $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot -x^2 = \frac{x^2}{\sqrt{1-u^2}}$

$y' = \frac{x^2}{\sin y}$ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$

(1) zu b) $y = \sin(x+C)$

Anfangsbed: $y_{(0)} = 0 = \sin C_1$

$C_1 = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$

$y = \sin(x + n\pi)$

c) $y' = e^{\frac{y^2}{x^2}}$

$\mathcal{D}$: $z = \frac{y}{x}$

$z' = \frac{f(z) - z}{x}$

$f(z) = e^{z^2}$

$z' = \frac{e^{z^2} - z}{x} = \frac{dz}{dx} =$

$\rightarrow \frac{dz}{e^{z^2} - z} = \frac{dx}{x}$

d) $y' = (2x+3y)^2$

$z = 2x + 3y$

$z' = 2 + 3 \cdot y'$

$$y' = \underbrace{\frac{z' - 2}{3} = z^2}$$

$$z' = 3z^2 + 2 = \frac{dz}{dx}$$

$$dx = \frac{dz}{3z^2+2}$$

$$\int dx = \int \frac{dz}{3z^2+2}$$

$$C + x = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}} \cdot z\right)$$

$$\tan(x\sqrt{6} + C) = \sqrt{\tfrac{3}{2}} \cdot z$$

$$z = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \tan\left[\sqrt{6}(x+C)\right]$$

$$y = \frac{z - 2x}{3} \qquad y = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \tan[\ ] - 2x}{3}$$

$y(x_0) = y_0$

G2 $\quad y' = f(ax+by+c)$

Substitution: $z = ax + by + c \Rightarrow z' = a + by'$

$$\Rightarrow y' = \frac{z'-a}{b} = f(z)$$

Variablentreng $\longrightarrow$ $z' = b \cdot f(z) + a \longrightarrow \frac{dz}{dx} = b\,f(z) + a$

$$\frac{dz}{b f(z)} = dx$$

9.11.09

lineare DGL 1. Ordnung

Allgem. Form (explizit): $\boxed{y' = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Koeffizientenfunktion}}}{g(x)} \cdot y + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Inhomogenität}}}{h(x)}}$

= inhomogene, lineare DGL 1. Ordnung

Wenn $h(x) = 0 \Rightarrow$ homogene DGL, linear 1. Ordnung

↳ $y'_{hom} = g(x) \cdot y_{hom}$, $y(x_0) = y_0$

$y_{hom}(x) = y_0 \, e^{\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt}$ ⤡ $G(x) := \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$

$y_{hom}(x) = y_0 \, e^{G(x)}$

Bsp: Hug'sches Gesetz (Feder)

$m\ddot{y}(t) = -\lambda y(t)$

Lösung der allgem. inhomogenen linearen DGLs 1. Ordn:

Methode: Variation der Konstanten / Verfahren von Lagrange

1.) nehme allgem. homogene Lösung $y(x) = c\,e^{G(x)}$

2.) Setze die Konstante c variabel in x: $c(x)$

3.) Setze diese modifizierte Funktion $\boxed{y(x) = c(x)\,e^{G(x)}}$ in die inhomogene DGL ein! $y' = g(x)\,y(x) + h(x)$

$\Rightarrow c'e^{G(x)} + \underline{c}\,g(x)\,\underline{e^{G(x)}} = g(x) \cdot y(x) + h(x)$

$c'e^{G(x)} + \cancel{g(x)\,y(x)} = \cancel{g(x)\,y(x)} + h(x)$

$c'e^{G(x)} = h(x) \Rightarrow \boxed{c' = h(x)\,e^{-G(x)}}$ →

$$C(x) = \int h(x) e^{-G(x)} \, dx + c$$

oder:

$$c(x) = \int_{x_0}^{x} h(t) e^{-G(t)} \, dt + C_1$$

$$y'(x) = g(x)\, y(x) + h(x) \quad ; \quad \cancel{y(x_0) = y_0}$$

$$y_{hom}(x) = C\, e^{G(x)} \quad ; \quad G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt$$

hier: Anfangsbed. beliebig

$$y(x_0) = C$$

Inhom.: $y(x) = C(x)\, e^{G(x)}$

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} h(t) e^{-G(t)} \, dt + C_1$$

beliebi. Anfangsbed. $y(x_0) = C_1$

Allgem. Lösung der inhom. Linearen DGL 1. Ordnung:

$$y(x) = \underbrace{\left[\int_{x_0}^{x} h(t) e^{-G(t)} \, dt + y_0 \right]}_{C(x)} \cdot e^{G(x)}$$

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(\alpha)\, d\alpha$$

Allgem hom. Lösung = spezielle inh. Lösung

$$\left(\int_{x_0}^{x} h(t) e^{-G(t)} \, dt \right) e^{G(x)} + C_1 e^{G(x)}$$

spez. Anfangsbed. $y(x_0) = y_0$

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} h(t) e^{-G(t)} \, dt + y_0 \right) e^{G(x)}$$

$\boxed{Ü}$ $y' = y + x$ $\quad g(x) = 1$

$h(x) = x$

$y'_{hom} = y_{hom}$

$y_{hom} = \bar{C} e^{x} = C_1 e^{x-x_0}$

$\left(\int_{x_0}^{x} t\, e^{-(t-x_0)} dt\right) \cdot e^{x-x_0} = y_p(x)$

Integral:

$\int t e^{-t} e^{x_0} dt = e^{x_0} \underbrace{\int t e^{-t} dt}$

Konstante

$= -t e^{-t} - e^{-t}$

$= -e^{-t}(1+t)$

$e^{x_0}\left[-e^{-x}(1+x) + e^{-x_0}(1+x_0)\right]$

$= -e^{-(x-x_0)}(1+x) + (1+x_0)$

$y_{p(x)} = \left(-e^{-(x-x_0)}(1+x) + (1+x_0)\right) \cdot e^{x-x_0} = -(1+x) + (1+x_0)e^{x-x_0} + C_1 e^{x-x_0}$

partikulär

$= -(1+x) + e^{x-x_0} \cdot (C_1 + 1 + x_0)$

Anfangsbed: $y(x = x_0 = 0) = 0$

$y(x = x_0 = 0) = -1 + 1(C_1 + 1 + 0) \stackrel{!}{=} 0$

$= -1 + C_1 + 1 + 0 = 0$

$C_1 = 0$

$\Rightarrow y_{(x)} = -(1+x) + e^{x}$

$y' = -1 + e^{x}$

$y + x = -1 \cancel{-x} + e^{x} \cancel{+x}$

inhom. lineare DGL:

$$y' = y + \underbrace{\sin x}$$

$h(x)$ = Inhomogenität

$g(x) = 1$

$$y(x) = C(x)\, e^{G(x)} \qquad G(x) = \int_{x_0}^{x} \underbrace{g(t)}_{1}\, dt = x - x_0$$

$$c' = h(x)\, e^{G(x)} = \sin(x)\, e^{x-x_0}$$

$$C = \int \sin(x) \cdot e^{-x} \cdot e^{+x_0} \, dx = \cancel{-\cos x \, e^{-x} + C_1}$$

$$\cancel{y(x) = (-\cos x\, e^{-x} + C_1) \cdot e^{x-x_0}}$$

Musterlösung:

$$y' = y + \sin x \qquad G(x) = \int_{x_0}^{x} 1\, dt = x - x_0$$

$$y(x) = \left[\int_{x_0}^{x} \sin(t) \cdot e^{-(t-x_0)}\, dt + y_0 \right] \cdot e^{x-x_0}$$

$$y(x) = \left(e^{x_0} \cdot \int_{x_0}^{x} \sin(t) \cdot e^{-t}\, dt + y_0 \right) \cdot e^{x-x_0}$$

$-\frac{1}{2}(\cos x - \sin x) e^{-x}$

$+\frac{1}{2}(\sin x + \cos x) e^{x}$

$$y(x) = e^{x_0} \left[-\frac{1}{2}(\sin x + \cos x) e^{-x} + C \right]$$

Grenzen $x_0 \to x$

$$y(x) = \left[e^{x_0} \left(-\frac{1}{2}(\sin x + \cos x) e^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x_0 + \cos x_0) e^{-x_0} \right) + y_0 \right] \cdot e^{x} \cdot e^{-x_0} = \left(-\frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + \frac{1}{2}(\sin x_0 + \cos x_0)\, e^{-x_0} \cdot e^{x} \right)$$

$=$

$$Y(x) = \left[e^{x_0}\left(-\frac{1}{2}(\sin x + \cos x) e^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x_0 + \cos x_0) e^{-x_0}\right) + y_0 \right] e^{x} \cdot e^{-x_0}$$

$$Y(x) = \left[\left(-\frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + \frac{1}{2}(\sin x_0 + \cos x_0) e^{x} \cdot e^{-x_0} + y_0\, e^{x} e^{-x_0}\right]$$

↳ allgem. Lösung für beliebige Anfangsbed.

für $y(x_0 = 0) = 0$

↳ $\boxed{Y(x) = -\frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + \frac{1}{2} e^{x}}$

↳ Lösung für spezielle Anfangsbed.

↓ Beweis auf Richtigkeit

$$Y'(x) = -\frac{1}{2}(\cos x - \sin x) + \frac{1}{2}(\sin x_0 + \cos x_0) e^{x} \cdot e^{-x_0} + y e^{x} e^{-x_0}$$

$$y' = \underbrace{-2x}_{g(x)}y + \underbrace{xe^{-x^2}}_{h(x)} \qquad y(x_0) = y_0$$

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} -2\cancel{x}\,dt$$

$$G_{(t)} = -t^2 \Rightarrow \underline{-x^2 + x_0^2}$$

$$y(x) = \left[\int_{x_0}^{x} \cancel{x}e^{-\cancel{t^2}} \cdot e^{+\cancel{t^2}+x_0^2}\,dx + y_0\right] \cdot e^{-x^2}e^{x_0^2}$$

Konstante vorziehen!

$$y_{(x)} = \left(\int_{x_0}^{x} te^{-\cancel{x_0}^2}\,dt + y_0\right) \cdot e^{-x^2}e^{x_0^2}$$

$$y(x) = \left[e^{-\cancel{x_0}^2} \cdot \left(\frac{\cancel{x}^2}{2} - \frac{\cancel{x_0}^2}{2}\right) + y_0\right] e^{-x^2}e^{x_0^2}$$

$$\boxed{y(x) = e^{-x^2}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x_0^2\right) + y_0 \cdot e^{-x^2}e^{x_0^2}}$$

allgem. Lösung

spez Anfangsbed: $y(x_0 = 0) = y_0 = 0$

$$\boxed{y(x) = e^{-x^2} \cdot \frac{1}{2}x^2}$$ spezielle Lösung

Ü1

$$(1+x^2)\,y' + xy - 1 = 0 \qquad y(x_0) = y_0$$

↳ Normalform explizite-:

$$y' = \frac{-xy+1}{1+x^2} = \frac{-xy}{1+x^2} + \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}$$

$$g(x) = -\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{x^{-1}+x}$$

$$\downarrow \qquad \underline{h(x)} = (1+x^2)^{-1}$$

$$\underline{g(x) = \frac{-x}{1+x^2}}$$

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{-t}{1+t^2}\,dt = -\int_{x_0}^{x} \frac{t}{1+t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\left(\ln(1+x^2) - \ln(1+x_0^2)\right)$$

$$Y(x) = \left[\int_{x_0}^{x} (1+x^2)^{-1} \cdot e^{+\ln(\,)} + y_0\right] \cdot e^{\ln((\,)^{\frac{1}{2}})}$$

$$G(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x^2}{1+x_0^2}\right) = -\ln\left(\left(\frac{1+x^2}{1+x_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$Y(x) = \left[\int_{x_0}^{x} (1+x^2)^{-1} \cdot \left(\frac{1+x^2}{1+x_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} + y_0\right] \ln((\ldots)^{-\frac{1}{2}})$$

$$Y(x) = \left\{\underbrace{\int_{x_0}^{x} (1+x^2)^{-1} \cdot \sqrt{\frac{1+x^2}{1+x_0}}} + y_0\right\} \ln((\ldots)^{-\frac{1}{2}})$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x_0^2}} \cdot \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\sqrt{1+x_0^2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{1+x_0^2}}\left(\operatorname{Arsinh} x - \operatorname{Arsinh} x_0\right)$$

$$Y(x) = \left\{\frac{1}{\sqrt{1+x_0^2}}\left(\operatorname{Arsinh} x - \operatorname{Arsinh} x_0\right) + y_0\right\} \cdot \sqrt{\frac{1+x_0^2}{1+x^2}}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(\operatorname{Arsinh} x - \operatorname{Arsinh} x_0\right) + y_0\sqrt{\frac{1+x_0^2}{1+x^2}}}$$ — allgemeine Lösung

Anfangsbed.: $y(x_0=0) = 0 \rightarrow$ $\boxed{y(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \operatorname{Arsinh} x}$ } spezielle Lösung

1) $y' = \dfrac{1 + C\frac{y}{x}}{C - \frac{y}{x}}$ $\qquad C = \text{constant}$

a) linear?

Einschränkung des Def-bereichs ?!

b) allgem. Lösung der DGL für bel. Anfangsbed.

Tip: $\int \frac{c-z}{1+z^2}\,dz = C\int \frac{1}{1+z^2}\,dz - \int \frac{z}{1+z^2}\,dz$

Lösung: $\sqrt{x^2+y^2} = De^{c\cdot\arctan\frac{y}{x}}$

Konstante

c) Lösung für Anfangsbed. $y(1) = 0$

d) allgem. Lösung in Polarkoordinaten

$x = r\cos\alpha$

$y = r\sin\alpha$

2) $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^2}{1+x^2}$

a) Linear? Lösung der DGL homogener Teil

b) inhomogene Lösung

1) $y' = \frac{1 + C\frac{y}{x}}{C - \frac{y}{x}}$ C_1 = Konstante

a) die Funktion ist nicht linear, da y im Nenner auftritt!

$x \neq 0$ $C - \frac{y}{x} \neq 0$

b)

$$y' = \frac{1}{C - \frac{y}{x}} + \frac{C\frac{y}{x}}{C - \frac{y}{x}} = \frac{1}{C - \frac{y}{x}} + \frac{C}{\frac{x}{y}C - 1}$$

$$\frac{1}{y'} = C - \frac{y}{x} + \frac{\frac{x}{y} \cdot C - 1}{C} = C - \frac{y}{x} + \frac{x}{y} - \frac{1}{C}$$

$$\frac{1}{y'} = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} + C - \frac{1}{C}$$

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y} + \frac{1}{C} - C$$

$$z = \frac{y}{x} \qquad z' = \frac{f(z) - z}{x} = \frac{\left(\frac{1 + C \cdot z}{C - z}\right) - z}{x} = \frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}dx = \frac{1}{\frac{1 + Cz}{C - z} - z} dz$$

$$\ln\frac{x}{x_0} = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\frac{1 + C_1 z}{C_1 - z} - z} dz$$

$$\underbrace{\ln\frac{x}{x_0}}_{\text{oder: } \ln x + C} = \int_{x_0}^{x} \frac{(C - z)\,dz}{1 + \cancel{Cz} - \cancel{Cz} + z^2}$$

$$= \int \frac{(C - z)\,dx}{1 + z^2} = C\int \frac{1}{1 + z^2} - \int \frac{z}{1 + z^2}$$

$$= C_1 \arctan z - \frac{1}{2}\ln(1 + z^2) + C_2 = \ln x + C_3$$

$$\Rightarrow C \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = \ln x + C_3$$

$$C_1 \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right) + \ln x + C_3$$

$$= \ln(\quad)^{\frac{1}{2}} + \ln x + C_3$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}\right) + \ln x + C_3$$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{1. Trennung der Variablen} \\ \text{2. Substitution}\end{array}}$

$\ast$

* zu b)

$$= \ln\left[\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\cdot x\right] + C_3$$

$$= \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) - \ln D$$

$$C\cdot\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{D}\right) \qquad \Big|\ e\text{ - Funktion}$$

$$e^{C\cdot\arctan\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{D}$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = D\cdot e^{C\cdot\arctan\frac{y}{x}}$$

c) Anfangsbed. $y(1) = 0$

$$\sqrt{1+0} = 1 = De^{C\cdot 0} = e^0\cdot D = D \qquad \arctan 0 = 0$$

$$\underline{D = 1}$$

$$\underline{\underline{\sqrt{x^2+y^2} = e^{C\cdot\arctan\frac{y}{x}}}}$$

d) Polarkoordinaten:

$$x = r\cdot\cos\varphi \quad \rightarrow \quad x^2 = r^2\cdot\cos^2\varphi$$

$$y = r\cdot\sin\varphi \quad \rightarrow \quad y^2 = r^2\cdot\sin^2\varphi$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = e^{C\cdot\arctan\frac{y}{x}}$$

$$\sqrt{r^2\cdot\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{1}} = r = e^{C\cdot\arctan\frac{r\cdot\sin\varphi}{r\cdot\cos\varphi}} = e^{C\cdot\arctan\cdot\tan\varphi}$$

$$\boxed{r = e^{C\cdot\varphi}}$$

2) $y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}$

$y' = \frac{2x^2}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} \cdot y$

$G(x) = \int_{x_0}^{x} -\frac{2t}{1+t^2} \, dt$

$y' = \underbrace{-\frac{2x}{1+x^2}}_{g(x)} \cdot y + \underbrace{\frac{2x^2}{1+x^2}}_{h(x)}$

$\cancel{G(x)} \to \int \frac{2t}{1+t^2} \, dt$

$\to \ln(1+t^2) + C$

$G(x) = -\ln(1+x^2) + \ln(1+x_0^2$

$= \ln\left(\frac{1+x_0^2}{1+x^2}\right)$

$y(x) = \left[\int_{x_0}^{x} \frac{2t^2}{\cancel{1+t^2}} \cdot \left(\frac{\cancel{1+t^2}}{1+x_0^2}\right) dt + y_0\right]\left(\frac{1+x_0^2}{1+x^2}\right)$

$y(x) = \left[\frac{1}{1+x_0^2} \cdot \frac{2}{3}(x^3 - x_0^3) + y_0\right] \frac{1+x_0^2}{1+x^2}$

$y(x) = \frac{2 \cdot (x^3 - x_0^3)}{3 \cdot (1+x^2} + y_0 \cdot \frac{1+x_0^2}{1+x^2}$

Bernoullische DGL

$$y' = p(x)\, y + q(x)\cdot y^n \qquad n \neq 0,1$$

Substitution: $\boxed{u = y^{1-n} \; *}$

$$u' = (1-n)\, y^{-n} \cdot y' \Rightarrow y' = \frac{u'}{1-n}\, y^n$$

Einsetzen in die DGL:

$$y' = \frac{u'}{1-n} \cdot y^n = p(x)\, y + q(x)\, y^n$$

Auflösen nach u':

$$u' = (1-n)\cdot p(x)\, y^{1-n} + (1-n)\cdot q(x)$$

Substitution berücksichtigen:

$$u' = \underbrace{(1-n)\, p(x)}_{p^*_{(x)}} \cdot u + \underbrace{(1-n)\cdot q(x)}_{q^*_{(x)}}$$

$$u' = p^*_{(x)} \cdot u + q^*(x)$$

DGL

Bsp Bernoullische DGL

$$y' = -\frac{y}{x} + x^2 y^2$$

$p(x) = -\frac{1}{x}$

$q(x) = x^2$

$n = 2$

$p^*_{(x)} = \frac{1}{x}$, $q^*_{(x)} = -x^2$

$\rightarrow u = \frac{1}{y} \rightarrow y = \frac{1}{u}$

$$u' = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{Koeffizientenfunktion } g(x)} \cdot u \underbrace{- x^2}_{\text{Inhomogenität } h(x)}$$

$$u(x) = \left[-\int_{x_0}^{x} t^2 e^{\ln\left(\frac{x_0}{t}\right)} dt + y_0\right] e^{\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)}$$

$$G_{(x)} = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{t}\, dt = \ln(x) - \ln(x_0) = \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

$$-G_{(x)} = \ln\left(\frac{x_0}{x}\right)$$

$$u(x) = \left[-\int_{x_0}^{x} t^2 \cdot \frac{x_0}{t}\, dt + y_0\right] \frac{x}{x_0}$$

$$u(x) = \left[-x_0 \int_{x_0}^{x} t\, dt + y_0\right] \frac{x}{x_0}$$

$$u(x) = \left[-x_0 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x_0^2\right) + y\right] \frac{x}{x_0}$$

$$u(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x_0^2 + \frac{y_0}{x_0} x$$

$$u(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \left(\frac{y_0}{x_0} + \frac{1}{2}x_0^2\right) x$$

$y = \frac{1}{u}$ = Lösung

!

$$y' = -\frac{y}{x} + \frac{\ln x}{x^2} y^2 \;;\; x > 0$$

$$y' = -\frac{y}{x} + \frac{\ln x}{x^2} y^2 \quad ; \quad x > 0$$

Substitution: $\boxed{u = y^{-1}}$

$$y' = -\frac{1}{x} \cdot y + \frac{\ln x}{x^2} y^2 \quad ; \quad x > 0$$

$$p(x) = -\frac{1}{x} \qquad q(x) = \frac{\ln x}{x^2} \qquad n = 2$$

$$p^*_{(x)} = \frac{1}{x} \qquad q^*(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$$

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{t}\, dt = \ln x - \ln x_0 = \ln\frac{x}{x_0}$$

$$-G(x) = \ln\frac{x_0}{x}$$

$$u' = p^*_{(x)} \cdot u + q^*_{(x)} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{Koeffizienten-Funktion } g(x)} u - \underbrace{\frac{\ln x}{x^2}}_{\text{inhomogenitätsfunktion } h(x)}$$

$$u(x) = \left[\int_{x_0}^{x} -\frac{\ln t}{t^2} \cdot e^{\ln\frac{x_0}{t}}\, dt + u_0 \right] e^{\ln\frac{x}{x_0}}$$

$$u(x) = \left[-\int_{x_0}^{x} \frac{\ln t}{t^2} \cdot e^{\ln\frac{x_0}{t}}\, dt + u_0 \right] e^{\ln\frac{x}{x_0}}$$

$$u(x) = \left[-\int_{x_0}^{x} \frac{\ln t}{t^2} \cdot \frac{x_0}{t}\, dt + u_0 \right] \cdot \frac{x}{x_0} = \left[-x_0 \int_{x_0}^{x} \frac{\ln t}{t^3}\, dt + y_0 \right] \cdot \frac{x}{x_0}$$

Papula S.493

NR: $\int \frac{\ln t}{t^3}\, dt = \frac{\ln t}{(3-1)\, t^2} - \frac{1}{(3-1)^2 t^2} = -\frac{1}{2t^2}\left(\ln t + \frac{1}{2}\right)$

$$u(x) = \left[-x_0 \cdot \left(-\frac{1}{2t^2}\left(\ln(t) + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2x_0^2}\left(\ln x_0 + \frac{1}{2}\right)\right) + u_0 \right] \frac{x}{x_0}$$

Riccatische DGL

$$y' = p(x)\,y^2 + q(x)\,y + r(x)$$

$y_i(x)$ sei eine Lösung der DGL ← muß gegeben sein!

Substitution: $\quad y(x) = y_i(x) + \frac{1}{u(x)}$

⇒ lineare DGL für $u(x)$:

$$u' = -\underbrace{(2p(x)\cdot y_i + q(x))}_{g(x)}\cdot u \underbrace{- p(x)}_{h(x)}$$

!

Beweis:

$u' = g(x)\cdot u - h(x)$
↓
allgem. Form

$y_{(x)} = y_i + \frac{1}{u_{(x)}}$; $\quad y' = y_i' - u_{(x)}^{-2}\cdot u_{(x)}'$ $\quad$; $\quad y^2 = y_i^2 + 2y_i\frac{1}{u_{(x)}} + \frac{1}{u_{(x)}^2}$

$$\cancel{y_i'} - \frac{u_{(x)}'}{u_{(x)}^2} = \cancel{p_{(x)}\,y_{i(x)}^2} + 2p_{(x)}\,y_{i(x)}\frac{1}{u_{(x)}} + \frac{p}{u^2} + \cancel{q\,y_i} + q\frac{1}{u} + \cancel{r} \qquad |\cdot(-u^2)$$

$$u_{(x)}' = -2p\,y_i\,u - p - qu$$

$$u_{(x)}' = -(2p_{(x)}y_{i(x)} + q_{(x)})\cdot u_{(x)} - p_{(x)} \qquad u' = -\underbrace{(2py_i + q)}_{g(x)}\cdot u \underbrace{-p}_{h(x)}$$

↘ ↙
allgem. Form

DGL

ü DGL (Riccati)

$$y' = -(2x+1)\cdot y + y^2 + 1 + x + x^2$$

spezielle Lösung:

$y_1(x) = x$ Probe durch einsetzen:

$$1 = -(2+1)\cdot x + x^2 + 1 + x + x^2$$

$$1 = \cancel{-2x^2} \cancel{-x} + \cancel{x^2} + 1 + \cancel{x} + \cancel{x^2}$$

$$1 = 1$$

$$y' = -(2x+1)y + y^2 + 1 + x + x^2$$

$$u' = -(2x-(2x+1))u - 1 \to u' = -u - 1$$

$$g(x) = -1$$

$$h(x) = -1$$

$$u(x) = \left[\int_{x_0}^{x} h(t)\, e^{-G(t)}\, dt + u_0\right] e^{G(t)} \qquad G(x) = \int_{x_0}^{x} 1\, dt$$

$$G(x) = -x + x_0 = x_0 - x$$

$$u(x) = \left[-\int_{x_0}^{x} \underbrace{e^{t-x_0}}_{\text{spalten!}}\, dt + u_0\right] e^{x_0 - x}$$

$$u(x) = \left[-e^{-x_0}\int_{x_0}^{x} e^{t}\, dt + u_0\right] e^{x_0 - x}$$

$$u(x) = \left[e^{-x_0}\cdot(e^{x} - e^{x_0}) + u_0\right] e^{x_0}\, e^{-x} = -e^{-x}(e^{x} - e^{x_0}) + u_0 e^{x_0 - x}$$

$$u(x) = -1 + e^{x_0 - x} + u_0 e^{x_0 - x} = -1 + e^{x_0 - x}(1 + u_0)$$

$$y(x) = x + \frac{1}{-1 + e^{x_0 - x}\cdot(1+u_0)} = x + \frac{1}{(1+C_1)\cdot e^{x_0 - x} - 1}$$

$y(x_0) = y_0$

$$y_0 = x_0 + \frac{1}{(1+C_1) - 1} = x_0 + \frac{1}{C_1} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{y_0 - x_0}$$

$$y(x) = x + \frac{1}{(1+C_1)\, e^{-(x-x_0)} - 1}$$

Ü zu Riccati

$$y' - 2x^2y + y^2 + x^4 - 2x - 1 = 0$$

spezielle Lösung: $y_1(x) = a + bx + cx^2$ $\qquad a, b, c = \text{const}$